フーリエ解析の基本の「キ」をザッと知ろう！

信号とは，多様な物理量（電圧，電流，音圧，光など）を表すもので，一般に，アナログ（時間連続）信号とディジタル（時間離散）信号に大別される．

ディジタル信号は，順番に並ぶ数値列の集合（数列）であり，k番目の数値を，

$$x[k] \quad ; k\text{は整数} \qquad (1・1)$$

で書き表すと，

$$\{x[k]\}_{k=-\infty}^{k=\infty} \qquad (1・2)$$

となる．

ディジタル信号 $x[k]$は，通常アナログ信号を「サンプリング（sampling）」することによって得られ，サンプリングが一定の時間間隔 T[秒]で行われると，

$$x[k] = x(kT) \qquad (1・3)$$

となる(**図1－1**)．こうした数列であるディジタル信号 $\{x[k]\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$を四則計算して，多彩なディジタル信号処理が実現されている．

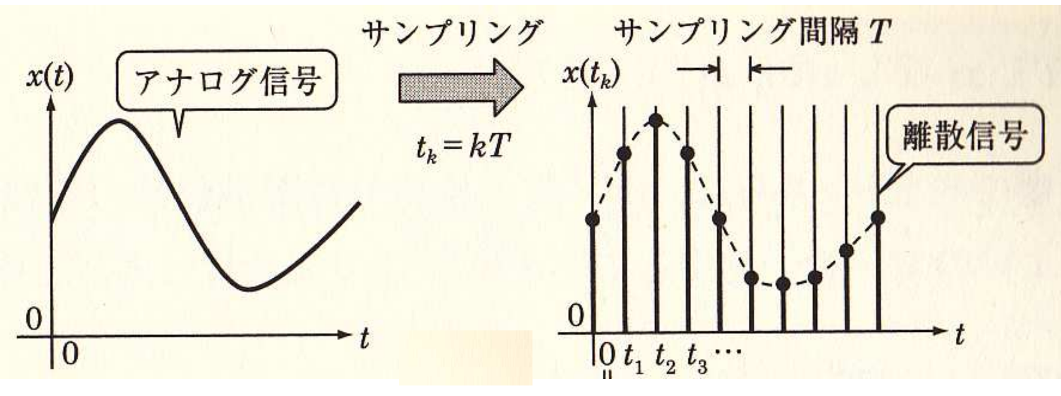

図1－1　時間離散（ディジタル）信号

基本1：ザックリと理解する ―― 信号数学とはこんなもの！

まずは，ディジタル信号処理のための三つの“信号数学”の極意，

『直交』，『相関』，『フーリエ解析』

を取り上げる．いずれの極意も，信号数学を理解するうえでのキーポイントと

なるもの．四則計算の範囲でイメージ的な解説にとどめることにして，最初に『**直交**』，『**相関**』の意味するところの感触を味わっていただきたい．

以下，美人の信号処理エンジニア（名前はQ子（きゅーこ））と博士が丁々発止でやりあう，興味深い会話の一部を紹介しよう．

Q子 初めまして，博士．信号数学がもつザックリとしたイメージを教えてほしいわ．

博士 いいですよ，多種多様なディジタル信号処理も，これからは女子力に頼らないといけないし，ズバズバ聞いてください．

Q子 さっそくなんですが，『**直交**』っていうのは，いったい何なんでしょう？

博士 そんなの簡単，直角に交わることですね，なんちゃって．信号が直角に交わるって，おそらくチンプン，カンプン？でしょ．それじゃあ，**図1－2**に示す二つのディジタル信号 $\boldsymbol{x}=\{a, b, c, d\}$ と $\boldsymbol{y}=\{e, f, g, h\}$ を考え，

$$<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>=\frac{1}{4}\{a\times e+b\times f+c\times g+d\times h\} \qquad (1\cdot 4)$$

という演算を定義しておきましょう．このとき，**図1－3**に示す四つの信号（❶，❷，❸，❹）を考え，異なる二つの信号に対して式（1・4）を計算してみてください．Q子さん，どんな値が得られるかな？

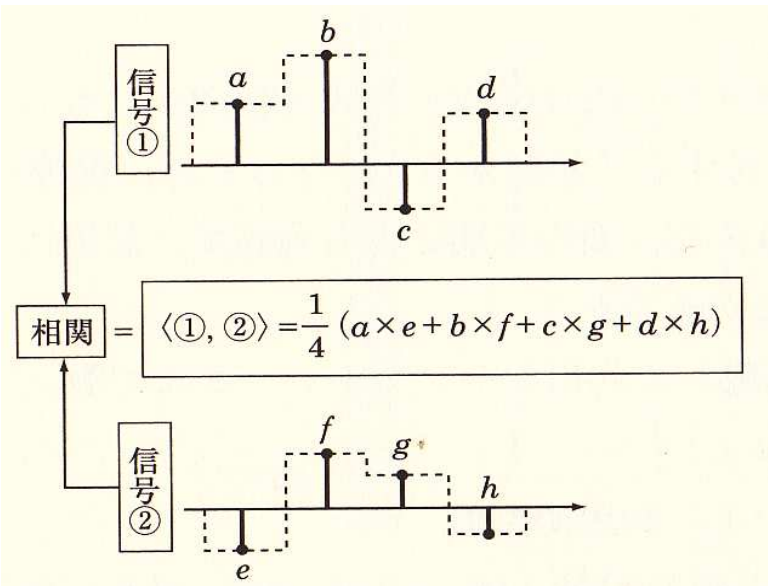

図1－2　ディジタル信号（4サンプル）の相関計算

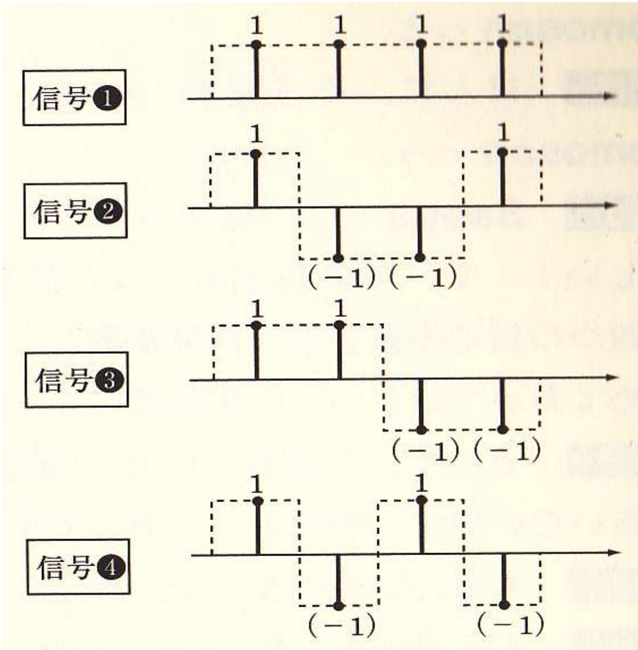

図1−3　“直交する”ディジタル信号例（4サンプル）

Q子　博士，私のこと，ちょっと見くびってないかしら．❶と❷なら，式（1・4）を適用すればいいんだから，

$$<❶,❷>=\frac{1}{4}\times\{1\times1+1\times(-1)+1\times(-1)+1\times1\}=\frac{1}{4}\times\{1-1-1+1\}=0 \qquad (1・5)$$

となって，一丁上がり．こんなもんですか，博士．

博士　種明かしをするとねぇー，式（1・5）のように式（1・4）の計算値が0（零）になるというのが『**直交**』という性質なんだ．簡単なことでしょ．ちなみに，式（1・4）で定義した“**積和**（乗算した結果を加算した値）”の1サンプル当たりの平均値が，『**相関**』と呼ばれるものなんだ．これでもう，『**直交**』と『**相関**』の信号数学の二つの極意がいっぺんに理解してもらえたっていうわけ．ざっと，こんなもんでしょう．

Q子　へぇーっ，ビックリしたわ．ほかの異なる二つの信号の相関はどうなるのかなあ？　ちょっと計算してみましょ．

$$
\begin{cases}
<❶,❸>=\dfrac{1}{4}\times\{1\times1+1\times1+1\times(-1)+1\times(-1)\}=\dfrac{1}{4}\times\{1+1-1-1\}=0 \\
<❶,❹>=\dfrac{1}{4}\times\{1\times1+1\times(-1)+1\times1+1\times(-1)\}=\dfrac{1}{4}\times\{1-1+1-1\}=0 \\
<❷,❸>=\dfrac{1}{4}\times\{1\times1+(-1)\times1+(-1)\times(-1)+1\times(-1)\}=\dfrac{1}{4}\times\{1-1+1-1\}=0 \\
<❷,❹>=\dfrac{1}{4}\times\{1\times1+(-1)\times(-1)+(-1)\times1+1\times(-1)\}=\dfrac{1}{4}\times\{1+1-1-1\}=0 \\
<❸,❹>=\dfrac{1}{4}\{1\times1+1\times(-1)+(-1)\times1+(-1)\times(-1)\}=\dfrac{1}{4}\times\{1-1-1+1\}=0
\end{cases}
\qquad (1・6)
$$

すばらしいわ，すべての組み合わせで『**相関が0**』になってるぅーー．『**信号が直交**』しているっていうことなんだ．チョー，驚き．こんなことが世の中にあっていいのかしら，うっふん，博士，どうなっているのかしら？

博士 Q子さんも美しいけど，式（1・5）と式（1・6）はもっと美しい！ すべての異なる二つの信号に対する『**相関が0**』になるとき，**図1－3**の四つの信号の集合を『**直交基底**』というんだ．頭の片隅にでも入れて，記憶にとどめておいてほしい，いずれ役に立つことがあるから．なお，一般にN個のサンプル値を有する二つのディジタル信号 $\boldsymbol{x}=\{x[n]\}_{n=0}^{n=N-1}$ と $\boldsymbol{y}=\{y[n]\}_{n=0}^{n=N-1}$ に対する相関は，

$$
\begin{aligned}
<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n] \\
&= \frac{1}{N}\{x[0]y[0]+x[1]y[1]+\cdots x[N-1]y[N-1]\}
\end{aligned}
\qquad (1・7)
$$

で与えられる．もちろん，

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=<\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}> \qquad (1・8)$$

の関係が成立することも明らかである（**可換性**という）．

Q子 そんなこと言わないで，『**直交基底**』の利用シーンをかいつまんで教えてもらいたいです．よろしく，お願いしまーす．

博士　イヨッと，「ガッテン承知の助（すけ）」なんちゃって，わかりましたよ．
いま，ある信号ⓧが（16，－２，4，－6）として，**図1－3**の四つの信号（❶，❷，❸，❹）を用いて合成することを考えてみよう．結論からで恐縮だけど，実は**図1－4**のように合成できるんだ．

ⓧ＝［信号❶を3倍］＋［信号❷を2倍］＋［信号❸を4倍］＋［信号❹を7倍］　（1・9）

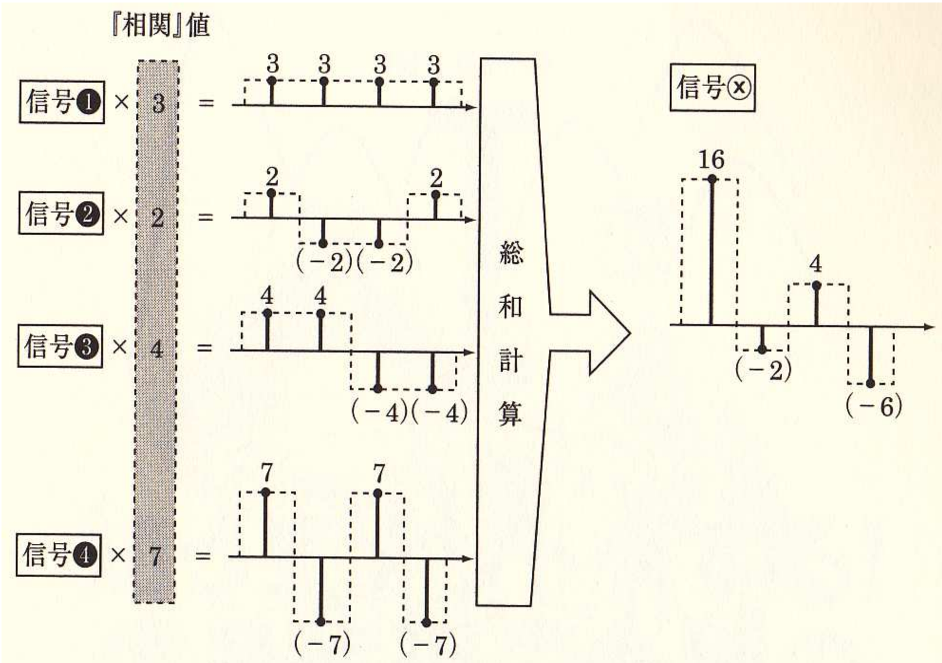

図1－4　「相関」と「直交」を利用した信号のフーリエ分析（DFT）／合成（IDFT）

Q子　本当，でも不思議だぁ．どうやって3倍，2倍，4倍，7倍という情報を見つけ出してくるのかしら．かなり難しそうだわ．

博士　いやあ，それがそうでもなくて，チョー簡単．ちょっと，やってみましょ．試しに，「信号❶を3倍」の情報における数値の‘3’から始めましょう．算出方法は，ある信号ⓧと信号❶の『**相関**』を求めるだけなんですね．式（1・4）の定義に代入すればいいので，

$$<ⓧ,❶>=\frac{1}{4}\times\{16\times1+(-2)\times1+4\times1+(-6)\times1\}=\frac{1}{4}\times\{16-2+4-6\}=3 \qquad (1\cdot10)$$

となって，驚いたことに3倍を表す数値‘3’が，あぶり出されてくるではないですか．

Q子　エッー，うそっー，そんなこと，凄すぎます．博士，たまたま，そうなっただけなんでしょう．でも，残りすべても『**相関**』で算出できるのかもしれない．騙されたと思って，信号❷でやってみようっと．

$$<ⓧ, ❷>=\frac{1}{4}\times\{16\times1+(-2)\times(-1)+4\times(-1)+(-6)\times1\}=\frac{1}{4}\times\{16+2-4-6\}=2 \qquad (1・11)$$

まあ，なんということでしょ．‘2’という数値が出て，あってるぅーー．残り二つの計算で，きっとボロが出るから，きっとネ．

$$<ⓧ, ❸>=\frac{1}{4}\times\{16\times1+(-2)\times1+4\times(-1)+(-6)\times(-1)\}=\frac{1}{4}\times\{16-2-4+6\}=4 \qquad (1・12)$$

$$<ⓧ, ❹>=\frac{1}{4}\times\{16\times1+(-2)\times(-1)+4\times1+(-6)\times(-1)\}=\frac{1}{4}\times\{16+2+4+6\}=7 \qquad (1・13)$$

えっ，えぇーっ．全部，正解？　くわばら，くわばら，触らぬ神に祟りなしっていうこと．さすがに博士ですね，後光が差しているわ．

博士　そうでしょうとも，たった二つだけの極意『**相関**』，『**直交**』を身につけてさえいれば，信号処理の世界をいとも簡単に攻略できるわけだからね．さらに付け加えれば，式（1・9）が『**フーリエ解析**』の物理的な意味として，

『**信号の直交基底による分解／合成**』

で，周波数成分の計算に相当しているんだな．まったくもって，フーリエ解析は信号数学に欠かせない，すごーいテクニックなんだから．

Q子　これまでは，『**フーリエ解析**』と言えば，難しい数学で見るのも嫌だったけど，どうってことはないんだわ．信号数学なんて，恐れるに足らずです．博士，有り難うございます．

博士　どんなもんじゃい，俺さまの実力をわかってもらえたかな．信号数学の土台になる三つの極意『**フーリエ解析**』，『**相関**』，『**直交**』は，信号処理の基本中の「キ」であるぞよ．数式を丸暗記するんじゃなく，信号数学のもつイメージを感覚的に把握することこそが，信号処理を身につけるための近道と言えるんじゃな．

Q子　はい，そうしますわ．博士，いろいろと有り難うございました．

三つの極意が醸し出す数学的な感覚を体感してもらったところで，いよいよ，ディジタル信号処理システムの解説開始となるのである．

本技術講習会では，　こんな調子で2回にわたり，「フーリエ変換」，「z変換」，「ディジタル・フィルタの設計と実装」，「適応フィルタ」，「マルチレート信号処理」．「ウェーブレット変換」等の基本中の“基本”を中心に，演習問題とともに体感しながら，理解・習得していきます.

・・・・・・セミナー講師より一言